Υποθέτουμε ότι έχουμε αρχικό κεφάλαιο $K_0 = 100$ μονάδων. Τα καταθέτουμε σε τράπεζα με επιτόκιο $i = 10\%$. Οι τόκοι υπολογίζονται στο τέλος κάθε χρόνου και προστίθενται στο αρχικό κεφάλαιο.

Μετά απο ένα χρόνο (στο τέλος του χρόνου) έχουμε

$$K_1 = 110 = 100 + 10 = 100\,(1 + 0,1) = K_0\,(1 + 0,1) = \\ = K_0\,(1 + i)\,. \quad (1)$$

Μετά απο δύο χρόνια (στο τέλος του χρόνου) έχουμε

$$K_2 = 121 = 110 + 11 = 110\,(1 + 0,1) = \\ K_1\,(1 + 0,1) = K_0\,(1 + 0,1)\,(1 + 0,1) = \\ K_0\,(1 + 0,1)^2 = K_0\,(1 + i)^2\,. \quad (2)$$

Μετά απο τρία χρόνια (στο τέλος του χρόνου) έχουμε

$$K_3 = 121{+}12,1 = 132,1 = 121\,(1 + 0,1) = K_2\,(1 + 0,1) = K_1\,(1 + 0,1)\,(1 + 0,1) = \\ K_0\,(1 + 0,1)\,(1 + 0,1)\,(1 + 0,1) = K_0\,(1 + 0,1)^3 = K_0\,(1 + i)^3\,. \quad (3)$$

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο με λόγο μεγαλύτερο της μονάδας $1 + i$, εκφρασμένο σε ποσοστό.

Απο τα προηγούμενα έχουμε ότι ο γενικός τύπος για αρχικό κεφάλαιο K_0 και επιτόκιο i μετά από n χρόνια είναι:

$$K_0\,(1 + i)^n$$

Το επιτόκιο i εκφράζεται σε δεκαδική μορφή.

Κανόνας γενικέυσης στο i και στο n.

Για ανατοκισμό ανα εξάμηνο έχουμε για το πρώτο εξάμηνο

$$K_{1/2} = 100{+}5 = 105 = 100\,(1 + 0,05) = 100\,(1 + 0,1/2) = K_0\,(1 + 0,1/2) = \\ = K_0\,(1 + i/2)\,. \quad (4)$$

για το δεύτερο εξάμηνο

$$K_{2/2} = K_{1/2} + 5,25 = 110,25 = K_{1/2}\,(1 + 0,1/2) = \\ = K_0\,(1 + 0,1/2)^2 = K_0\,(1 + i/2)^2\,. \quad (5)$$

Δηλ. στο τέλος του πρώτου χρόνου με εξάμηνο ανατοκσιμό (δύο περίοδοι υπολογισμού τόκων) έχουμε κεφάλαιο

$$K_0\left(1+0,1/2\right)^2 \quad = \quad K_0\left(1+i/2\right)^2. \tag{6}$$

Μετά απο τρία εξάμηνα έχουμε:

$$K_{3/2}=110,25+5,5125=115,7625=K_{2/2}\left(1+0,1/2\right)= \\ K_{1/2}\left(1+0,1/2\right)^2=K_0\left(1+0,1/2\right)^3=K_0\left(1+i/2\right)^3. \tag{7}$$

Μετά απο τέσσερα εξάμηνα έχουμε:

$$K_{4/2}=115,7625+5,788125=121,550625=K_{3/2}\left(1+0,1/2\right)= \\ K_{2/2}\left(1+0,1/2\right)^2=K_{1/2}\left(1+0,1/2\right)^3=K_0\left(1+0,1/2\right)^4=K_0\left(1+i/2\right)^4. \tag{8}$$

Απο τα προηγούμενα έχουμε ότι ο γενικός τύπος για αρχικό κεφάλαιο K_0 και επιτόκιο i μετά από n χρόνια για εξάμηνο ανατοκισμό (δυο φορές το χρόνο υπολογίζουμε τόκους) είναι:

$$K_0\left(1+i/2\right)^{2n}$$

Το επιτόκιο i εκφράζεται σε δεκαδική μορφή.

Ο τύπος γενικεύεται και αν έχω n περιόδους ανατοκισμού κάθε χρόνο, επιτόκιο i, αρχικό κεφάλαιο K_0 μετά απο m χρόνια το κεφάλαιο θα είναι

$$K_m=K_0\left(1+i/n\right)^{mn}.$$

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο με λόγο μεγαλύτερο της μονάδας. Στα προηγόυμενα έχουμε την εξέλιξη του φαινομένου να γίνεται σε συγκκριμένες στιγμές και το παρατηρούμε αυτές τις στιγμές.

Στην περίπτωση που το φαινόμενο εξελίσεται συνεχώς (βιολογικά φαινόμενα, εξελιξη πληθυσμών) χρησιμοποιούμε προσέγγιση, επειδή δεν μπορούμε να παρατηρούμε την εξέλιξη συνεχώς αλλά σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

Η προσέγγιση δίνεται απο τον τύπο

$$\left(1+1/n\right)^n.$$

Ισχύει

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)^n$$

Δηλ. αν έχουμε συνεχή ανατοκισμό (βιολογικά φαινόμενα, εξελλιξη πληθυσμών) ο λόγος της προόδου είναι ο e υψωμένος σε κάποια δύναμη π.χ. $e^{0,021}$. Σε μία αδρή προσέγγιση η “συνεχής” γεωμετρική πρόοδος εκφράζεται με εκθετική συνάρτηση (λόγος γεωμετρικής προόδου).

Ο συντελεστής

$$\binom{n}{k}$$

ονομάζεται δυωνυμικός συντελεστής. Εμφανίζεται στις εκφράσεις

$$(a+b)^n.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}a^0b^2. \quad (9)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}b^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^3b + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3. \quad (10)$$

Ο γενικός τύπος είναι:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n. \quad (11)$$

Για την δυωνυμική κατανομή έχουμε $a = p$, $b = 1-p$ και ισχύει $(p + (1-p))^n = 1^n = 1$. Ο συντελεστής $\binom{n}{k}$ μας δηλώνει απο n (σύνολο προσπαθειών - πειραμάτων τύχης) k θα έχουν επιτυχή έκβαση. Είναι ίσος με

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\cdots(n-k+1)$$

Προτιμάμε την έκφραση που δεν περιέχει το κλάσμα (λιγότερο πολύπλοκοι υπολογισμοί).